Chapitre 7

Analyse sinusoïdale

Jusqu'à présent, on a seulement analysé des circuits ayant des sources constantes (DC). Ce chapitre présente l'analyse de circuits ayant des sources variables (AC). On s'intéresse aux sources sinusoïdales. Les sources sinusoïdales sont très importantes, puisque le réseau électrique fonctionne avec des sources sinusoïdales à une fréquence de 60Hz.

L'étude des circuits ayant des sources sinusoïdales permet aussi d'apprendre les techniques de base qui permettront l'analyse de circuits ayant des sources non-sinusoïdales.

On verra aussi que les méthodes d'analyse vues dans les chapitres 1 à 3 s'appliquent aussi dans le cas de sources sinusoïdales.

7.1 Source sinusoïdale

Une source sinusoïdale (dépendante ou indépendante) produit une tension (ou un courant) qui varie de façon sinusoïdale avec le temps. On peut exprimer une source sinusoïdale avec un sinus ou un cosinus, mais c'est le cosinus qui est plus courant.

Une source sinusoïdale est donc exprimée de la forme :

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \tag{7.1}$$

où les paramètres sont donnés à la figure 7.1. La fréquence du signal ω représente la fréquence *radiale*, et son unité est le [rad/s]. La phase du signal est ϕ, en radians ou degrés, et V_m est l'amplitude maximale de la source.

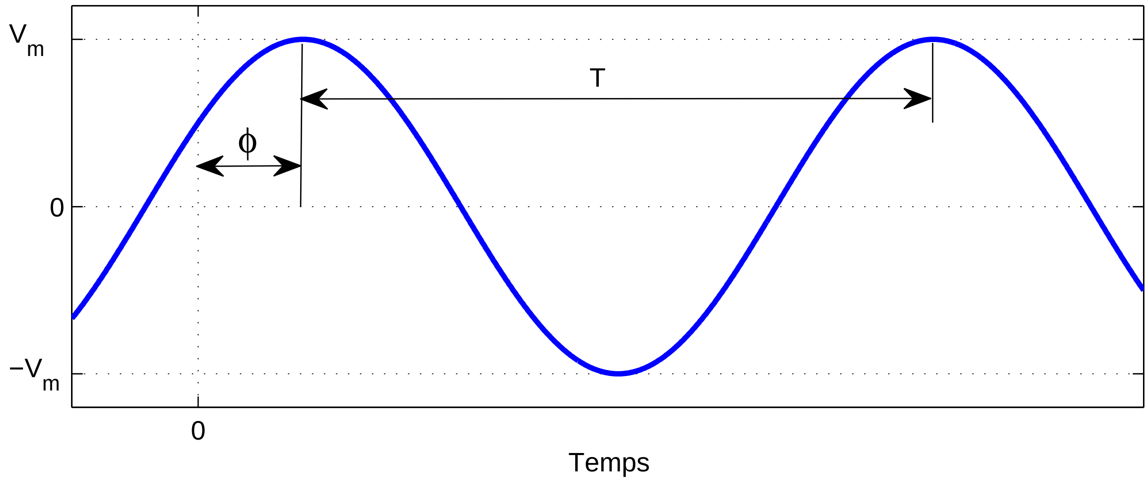


Figure 7.1 – Source sinusoïdale

On a aussi les relations bien connues :

$$T = \frac{1}{f} \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{7.2}$$

où T est la période du signal, et f la fréquence.

Une autre valeur importante est la valeur RMS d'un signal. La valeur RMS est :

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt} \tag{7.3}$$

Pour un signal sinusoïdal,

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V_M^2 \cos^2(\omega t + \phi)dt} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \tag{7.4}$$

La valeur rms d'un signal est importante dans le calcul des puissances. En effet, une source sinusoïdale ayant une valeur rms de V_{rms} fournit la même puissance (par période) à une résistance R qu'une source DC de même amplitude.

7.2 Phaseur

Le phaseur est un nombre qui contient de l'information à propos de l'amplitude et la phase d'une quantité (tension ou courant dans notre cas). On obtient le phaseur en appliquant la relation d'Euler [1] :

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) \tag{7.5}$$

Donc, le cosinus est la partie réelle :

$$\cos(\theta) = \Re\mathfrak{e}\{e^{j\theta}\} \tag{7.6}$$

On peut appliquer cette relation à la définition de la tension sinusoïdale :

$$v = V_m \cos(\omega t + \phi) \tag{7.7}$$
$$= V_m \Re\mathfrak{e}\{e^{j(\omega t+\phi)}\} \tag{7.8}$$
$$= V_m \Re\mathfrak{e}\{e^{j\omega t} e^{j\phi}\} \tag{7.9}$$

La partie $e^{j\omega t}$ est constante pour des tensions et courants ayant la même fréquence. Le phaseur est définit selon :

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\phi} = V_m \angle \phi \tag{7.10}$$

Exemple 1

Exprimer $v = 120\cos(60\pi t + 40°)$ en phaseur.

On a les caractéristiques : $V_m = 120$, et $\phi = 40°$. Donc,

$$\mathbf{V} = 120\angle 40°$$

On peut aussi exprimer un phaseur comme un nombre complexe, en utilisant la relation d'Euler :

$$V_m e^{j\theta} = V_m \cos(\theta) + jV_m \sin(\theta) \tag{7.11}$$

Exemple 2

Exprimer $v = 120\cos(60\pi t + 40°)$ en phaseur complexe.

On a les caractéristiques : $V_m = 120$, et $\phi = 40°$. Donc,

$$\mathbf{V} = 120\angle 40° = 120(\cos(40°) + j\sin(40°)) = 91.93 + j77.13$$

---

1. En génie électrique, on utilise j pour représenter les nombres complexes, pour éviter la confusion avec le courant i

7.2.1 Opération sur des phaseurs

Addition ou soustraction

On doit transformer des phaseurs en forme complexe avant de faire l'addition ou la soustraction.

EXEMPLE 3

Additionner les deux phaseurs $\mathbf{Y}_1 = 20\angle(-30°)$ et $\mathbf{Y}_2 = 40\angle(60°)$.

On transforme :

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_1 &= 20\cos(-30°) + j20\sin(-30°) = 17.32 - j10\\ \mathbf{Y}_2 &= 40\cos(60°) + j40\sin(60°) = 20 + j34.64\end{aligned}$$

La somme est :

$$\mathbf{Y}_T = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 = 37.32 + j24.64$$

En on retourne sous la forme polaire :

$$\mathbf{Y}_T = \sqrt{37.32^2 + 24.64^2}\angle\tan^{-1}\left(\frac{24.64}{37.32}\right) = 44.72\angle(33.43°)$$

Multiplication

Pour la multiplication, on multiplie les amplitudes et on additionne les phases.

EXEMPLE 4

Multiplier les deux phaseurs $\mathbf{Y}_1 = 20\angle(-30°)$ et $\mathbf{Y}_2 = 40\angle(60°)$.

$$\mathbf{Y}_T = \mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{Y}_2 = (20)(40)\angle(-30° + 60°) = 800\angle(30°)$$

Division

Pour la division, on divise les amplitudes et on soustrait les phases.

EXEMPLE 5

Diviser les deux phaseurs $\mathbf{Y}_1 = 20\angle(-30°)$ et $\mathbf{Y}_2 = 40\angle(60°)$.

$$\mathbf{Y}_T = \frac{\mathbf{Y}_1}{\mathbf{Y}_2} = \frac{20}{40}\angle(-30-60) = 0.5\angle(-90°)$$

7.3 Éléments passifs

Avant d'utiliser les phaseurs dans les circuits, il faut premièrement trouver la relation entre les tensions et courants des différents éléments passifs.

7.3.1 Résistance

Soit $i = I_m \cos(\omega t+\theta_i)$, le courant dans une résistance R. La tension dans cette résistance est :

$$v_R = Ri = RI_m \cos(\omega t + \theta_i) \tag{7.12}$$

$$= V_m \cos(\omega t + \theta_i) \tag{7.13}$$

où $V_m = RI_m$.

D'après cette relation, la tension et le courant ont la même phase ; ils sont en phase. La tension dans une résistance est maximale au même moment que le courant est maximal. En termes de phaseurs, on peut écrire :

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \tag{7.14}$$

On définit maintenant un nouveau concept : l'impédance (Z). L'impédance représente le rapport entre la tension et le courant d'un élément. Pour une résistance,

$$Z_R = \frac{\mathbf{V}_R}{\mathbf{I}_R} = \frac{RI_m\angle(\theta_i)}{I_m\angle(\theta_i)} = R \tag{7.15}$$

Pour une résistance, l'impédance est tout simplement la valeur de la résistance R.

7.3.2 Inductance

Soit $i = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$, le courant dans une inductance L. La tension dans cette inductance est :

$$v_L = L\frac{di}{dt} = -\omega L I_m \sin(\omega t + \theta_i) \tag{7.16}$$
$$= -\omega L I_m \cos(\omega t + \theta_i - 90°) \tag{7.17}$$

La représentation en phaseurs donne :

$$\mathbf{V}_L = -\omega L I_m e^{-j90°} e^{j\theta_i} \tag{7.18}$$
$$= j\omega L I_m e^{j\theta_i} \tag{7.19}$$
$$= j\omega L \mathbf{I}_L \tag{7.20}$$

où on a utilisé la relation $e^{-j90°} = -j$.

L'impédance d'une inductance est :

$$Z_L = \frac{\mathbf{V}_L}{\mathbf{I}_L} = \frac{j\omega L I_m \angle(\theta_i)}{I_m \angle(\theta_i)} = j\omega L = \omega L \angle 90° \tag{7.21}$$

La tension est en avance de 90° dans une inductance, par rapport au courant.

7.3.3 Capacitance

Soit $i = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$, le courant dans une capacitance C. La tension dans cette capacitance est :

$$v_C = \frac{1}{C}\int_0^t i\, d\tau = \frac{1}{C}\int_0^t I_m \cos(\omega\tau + \theta_i)\, d\tau \tag{7.22}$$
$$= \frac{1}{\omega C} \sin(\omega\tau + \theta_i) \tag{7.23}$$
$$= \frac{1}{\omega C} I_m \cos(\omega t + \theta_i - 90°) \tag{7.24}$$
$$= -\frac{j}{\omega C} \cos(\omega\tau + \theta_i) \tag{7.25}$$

La représentation en phaseurs donne :

$$\mathbf{V}_C = -\frac{j}{\omega C}\cos(\omega\tau + \theta_i) \tag{7.26}$$
$$= -\frac{j}{\omega C} I_m e^{j\theta_i} \tag{7.27}$$
$$= -\frac{j}{\omega C}\mathbf{I}_L \tag{7.28}$$
$$= \frac{1}{j\omega C}\mathbf{I}_L \tag{7.29}$$

où on a utilisé la relation $1/j = -j$.

L'impédance d'une inductance est :

$$Z_C = \frac{\mathbf{V}_C}{\mathbf{I}_C} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C}\angle(-90°) \tag{7.30}$$

Le courant est en avance de 90° par rapport à la tension dans une capacitance.

7.3.4 Impédance

Dans les trois éléments, on a la relation $\mathbf{V} = Z\mathbf{I}$, où Z est l'impédance.
- La partie réelle de l'impédance est la *résistance*.
- La partie imaginaire de l'impédance est la *réactance*.

L'inverse de l'impédance est l'*admittance*, Y.

$$Y = \frac{1}{Z} = G + jB \tag{7.31}$$

où la partie réelle, G, est appelée la *conductance*, et la partie imaginaire, B, est appelée la *susceptance*.

7.4 Lois de Kirchhoff

Les lois de Kirchhoff s'appliquent tous de la même façon avec des impédances.
1. LKC : la somme des courants à un noeud est 0 : $\sum \mathbf{I} = 0$.
2. LKT : la somme des tensions dans une boucle est 0 : $\sum \mathbf{V} = 0$.

Les impédances en série suivent les règles des résistances :

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots \tag{7.32}$$

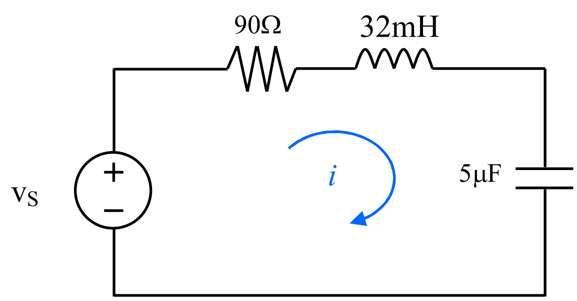
Les impédances en parallèle suivent aussi les règles des résistances :

$$Z_{eq} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \cdots \right)^{-1} \tag{7.33}$$

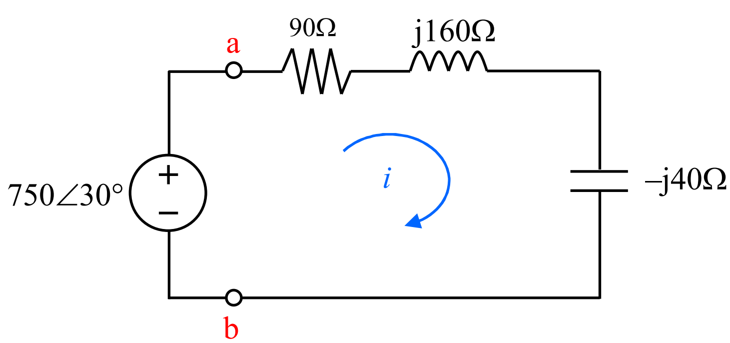
Les méthodes de tension de noeud, courant de maille, équivalent Thévenin et Norton, transformation de source et superposition s'appliquent tous de la même façon, en remplaçant R par Z dans les méthodes.

Exemple 6

Pour le circuit suivant, où $v_s(t) = 750\cos(5000t + 30°)$, calculer le courant $i(t)$.



On doit transformer le circuit pour utiliser les impédances. Le circuit équivalent est :



où on a effectué les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} Z_R &= R = 90\Omega \\ Z_L &= j\omega L = j(5000)(0.032) = j160\Omega \\ Z_C &= \frac{-j}{\omega C} = \frac{-j}{(5000)(5\times 10^{-6})} = -j40\Omega \end{aligned}$$

L'impédance équivalente entre a et b est :

$$Z_{eq} = 90 + j160 - j40 = 90 + j120 = 150\angle(53.13°)\Omega$$

Le courant est donc :

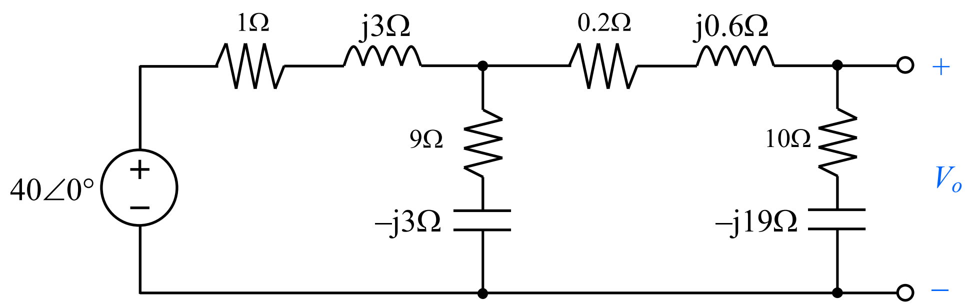
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{Z_{eq}} = \frac{750\angle(30°)}{150\angle(53.13°)} = 5\angle(-23.13°) \text{ A}$$

Et, en fonction du temps,

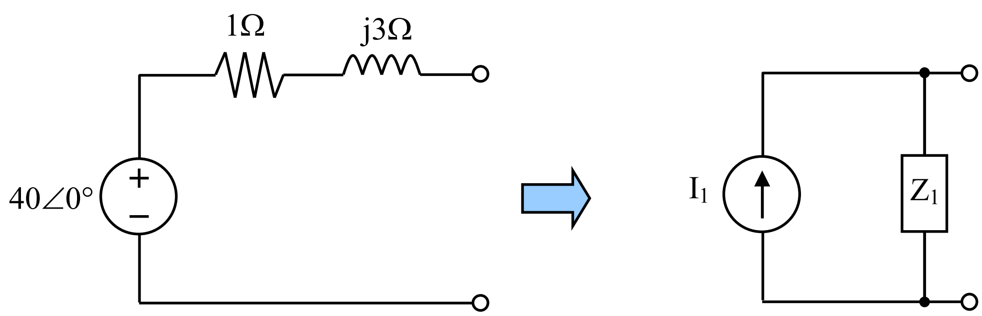
$$i(t) = 5\cos(5000t - 23.13°) \text{ A}$$

Exemple 7

Calculer la tension V_o par transformation de source.



On effectue la première transformation :

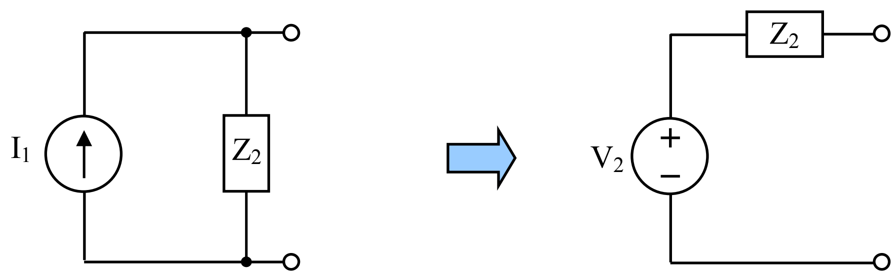


où $Z_1 = 1 + j3$, et la source de courant est :

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}}{Z_1} = \frac{40\angle(0)}{1+j3} = \frac{40\angle(0)}{\sqrt{10}\angle(71.57)}$$
$$= 12.65\angle(-71.57°) = 4 - j12 \text{ A}$$

La nouvelle impédance Z_1 est en parallèle avec la combinaison $9 - j3$. L'impédance équivalente, qu'on nomme Z_2, est :

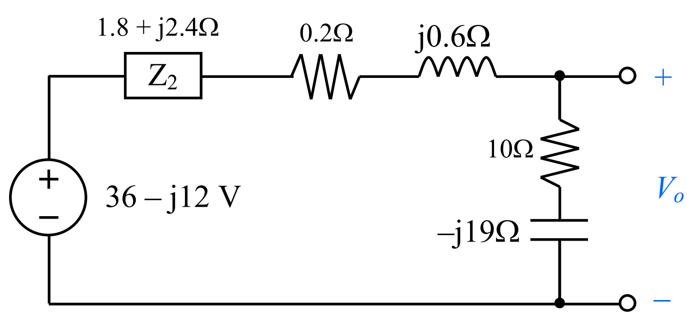
$$Z_2 = Z_1 \| (9 - j3) = \frac{(1+j3)(9-j3)}{(1+j3)+(9-j3)} = \frac{18+j24}{10} = 1.8 + j2.4\Omega$$



On effectue une nouvelle simplification où la tension $\mathbf{V}_2$ est :

$$\mathbf{V}_2 = Z_2\mathbf{I}_1 = (1.8 + j2.4)(4 - j12) = 36 - j12 \text{ V}$$

Le circuit est maintenant :

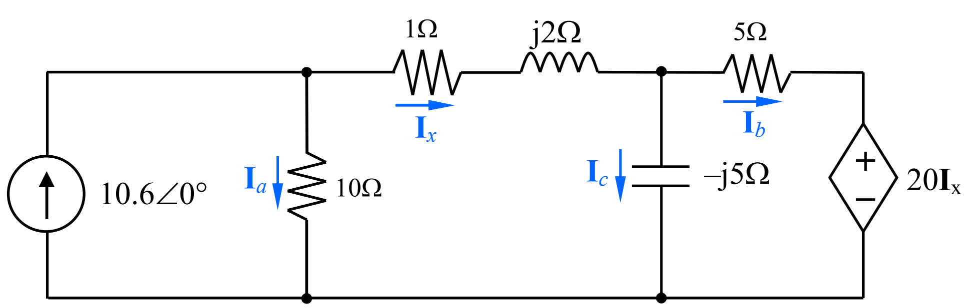


On a maintenant un diviseur de tension. La tension de sortie est :

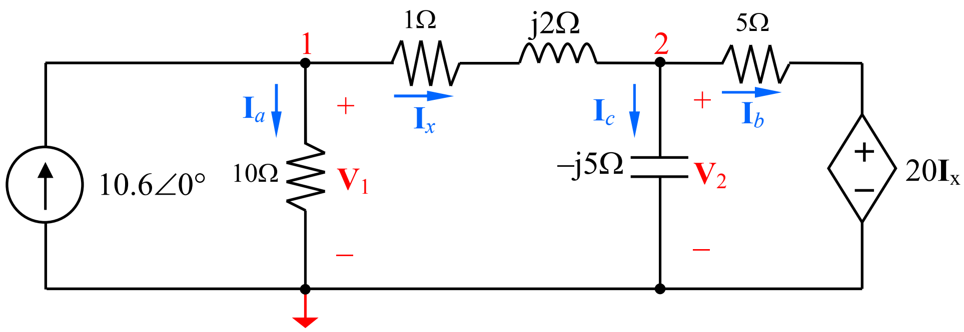
$$\begin{aligned}\mathbf{V}_o &= \frac{10 - j19}{(1.8 + j2.4) + 0.2 + j0.6 + (10 - j19)}(36 - j12) = 36.12 - j18.84 \text{ V}\\ &= 40.74\angle(-27.55°) \text{ V}\end{aligned}$$

Exemple 8

Utiliser la méthode des tensions de noeuds pour calculer les courants $\mathbf{I}_a$, $\mathbf{I}_b$ et $\mathbf{I}_c$.



Il y a trois noeuds essentiels, donc on a besoin de deux tensions de noeud. On utilise le noeud du bas comme noeud de référence.



On fait la somme des courants qui sortent du noeud 1 :

$$-10.6+\frac{\mathbf{V}_1}{10}+\frac{\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2}{1+j2}=0$$

Et puis la même chose au noeud 2 :

$$\frac{\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1}{1+j2}+\frac{\mathbf{V}_2}{-j5}+\frac{\mathbf{V}_2-20\mathbf{I}_x}{5}=0$$

Il faut une troisième équation pour $\mathbf{I}_x$.

$$\mathbf{I}_x=\frac{\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2}{1+j2}$$

On a trois équations et trois inconnues. On résout pour obtenir :

$$\mathbf{V}_1=68.40-j16.80 \text{ V}$$
$$\mathbf{V}_2=68.0-j26.0 \text{ V}$$

Avec ces tensions, on peut calculer les courants.

$$\mathbf{I}_a=\frac{\mathbf{V}_1}{10}=6.84-j1.68 \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_x=\frac{\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2}{1+j2}=3.76+j1.68 \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_b=\frac{\mathbf{V}_2-20\mathbf{I}_x}{5}=-1.44-j11.92 \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_c=\frac{\mathbf{V}_2}{-j5}=5.2+j13.6 \text{ A}$$

7.5 Calculs de puissance

On analysera ici la puissance dissipée dans différents éléments.

7.5.1 Puissance instantanée

Comme on l'a déjà vu, la puissance à tout moment dans un élément est donné par :

$$p = vi \tag{7.34}$$

c'est la puissance instantanée.

En régime sinusoïdal, la tension et le courant sont :

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \tag{7.35}$$
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i) \tag{7.36}$$

De façon générale, lorsqu'on fait l'analyse de circuits avec des sources sinusoïdales, on choisit comme temps de référence le temps où le courant est maximal. Les expressions de tension et courant sont donc modifiées :

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v - \theta_i) \tag{7.37}$$
$$i(t) = I_m \cos(\omega t) \tag{7.38}$$

Lorsqu'on remplace ces dernières expressions dans l'équation 7.34 pour obtenir la puissance instantanée, on obtient :

$$p = V_m I_m \cos(\omega t + \theta_v - \theta_i) \cos(\omega t) \tag{7.39}$$

À l'aide d'identités trigonométriques, on peut simplifier :

$$p = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) \cos(2\omega t) - \frac{V_m I_m}{2} \sin(\theta_v - \theta_i) \sin(2\omega t) \tag{7.40}$$

Noter que le premier terme ne dépend pas du temps. On peut réécrire l'expression sous une autre forme :

$$p = P + P\cos(2\omega t) - Q\sin(2\omega t) \tag{7.41}$$

où

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) \tag{7.42}$$
$$Q = \frac{V_m I_m}{2} \sin(\theta_v - \theta_i) \tag{7.43}$$

La puissance P est appelée la *puissance moyenne* et la puissance Q est appelée la *puissance réactive*. Pour distinguer entre les deux puissances, l'unité de P est le Watt [W], et l'unité de Q est le Volt-Ampère-Réactif, le VAR [VAR].

7.5.2 Puissance dans une résistance

Dans une résistance, la tension et le courant sont en phase ($\theta_v = \theta_i$). L'équation 7.41 se simplifie donc à :

$$p = P + P\cos(2\omega t) \tag{7.44}$$

Selon cette équation, la puissance ne sera jamais négative : on ne peut jamais extraire de la puissance d'une résistance. Toute l'énergie dissipée se transforme en chaleur.

7.5.3 Puissance dans une inductance

Dans une inductance, la tension et le courant sont déphasés de 90°. Le courant est en arrière de la tension de 90° : $\theta_v - \theta_i = 90°$. L'équation 7.41 pour une inductance est donc :

$$p = -Q\sin(2\omega t) \tag{7.45}$$

Dans une inductance, la puissance moyenne P est nulle. Il n'y a pas de transformation d'énergie électrique en chaleur, comme c'est le cas pour une résistance. Lorsque $p > 0$, l'inductance emmagasine de l'énergie, et lorsque $p < 0$, l'inductance fournit de l'énergie au circuit.

7.5.4 Puissance dans une capacitance

Dans une capacitance, la tension et le courant sont déphasés de −90°. Le courant est en avance de la tension de 90° : $\theta_v - \theta_i = -90°$. L'équation 7.41 pour une capacitance est donc :

$$p = Q\sin(2\omega t) \tag{7.46}$$

Dans une capacitance, la puissance moyenne P est elle aussi nulle. Il n'y a pas de transformation d'énergie électrique en chaleur, comme c'est le cas pour une résistance. Lorsque $p > 0$, la capacitance emmagasine de l'énergie, et lorsque $p < 0$, la capacitance fournit de l'énergie au circuit.

7.5.5 Puissance réactive Q

La puissance réactive est une autre façon de caractériser un circuit. Pour une inductance, $Q > 0$: on dit que l'inductance consomme de la puissance réactive. Pour une capacitance, $Q < 0$, et on dit que la capacitance fournit de la puissance réactive.

7.5.6 Facteur de puissance

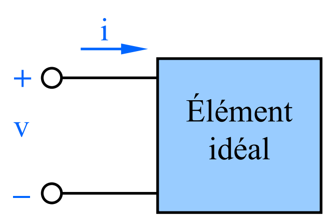
L'expression $\cos(\theta_v - \theta_i)$ est appelé le *facteur de puissance* (f_p). C'est une mesure communément utilisé pour décrire des moteurs électriques. Un facteur de puissance peut être *en arrière*, indiquant que la charge est inductive, ou être *en avance*, indiquant que la charge est capacitive.

Dans les industries, le facteur de puissance est très important. Énergie NB impose des amendes sévères si le facteur de puissance est plus petit que 0.9. Ces amendes peuvent s'avérer de l'ordre de plusieurs milliers de dollars par année.

Dans des industries, le facteur de puissance est généralement en arrière, puisque les moteurs électriques présentent des charges inductives. Les techniques permettant de corriger le facteur de puissance peuvent être très coûteuses, mais généralement en valent le coût à long terme.

EXEMPLE 9

Dans l'élément idéal suivant, la tension $v = 100\cos(\omega t + 15°)$ V, et le courant $i = 4\sin(\omega t - 15°)$ A.



1. Calculer la puissance moyenne et la puissance réactive.
2. Indiquer si l'élément absorbe ou fournit de la puissance moyenne.
3. Indiquer si l'élément absorbe ou fournit de la puissance réactive.

---

1. Il faut premièrement transformer le courant à une fonction de cos :

$$i = 4\cos(\omega t - 105°)$$

On peut maintenant calculer P et Q :

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{1}{2}(100)(4)\cos(15-(-105)) = -100 \text{ W}$$
$$Q = \frac{1}{2}V_m I_m \sin(\theta_v - \theta_i) = \frac{1}{2}(100)(4)\sin(15-(-105)) = 173.21 \text{ VAR}$$

2. Puisque la puissance moyenne P est négative, le circuit fournit de la puissance.

3. Puisque la puissance réactive Q est positive, le circuit absorbe de la puissance réactive.

7.6 Valeur RMS et calculs de puissance

Le calcul de puissances s'effectue souvent avec la valeur RMS d'une tension ou d'un courant. Si on applique une tension sinusoïdale aux bornes d'une résistance, la puissance moyenne (sur une période) est :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_m^2 \cos^2(\omega t + \theta_v)}{R}\, dt \\ &= \frac{1}{R}\left(\frac{1}{T}\int_0^T V_m^2 \cos^2(\omega t + \theta_v)\, dt\right) \end{aligned} \tag{7.47}$$

Si on compare cette équation avec l'équation 7.3, on s'aperçoit que la puissance est :

$$P = \frac{V_{rms}^2}{R} \tag{7.48}$$

De la même façon, la puissance peut être écrite selon :

$$P = RI_{rms}^2 \tag{7.49}$$

On appelle aussi la valeur RMS la valeur effective de la tension. Une source sinusoïdale ayant une valeur RMS V_{rms} fournit autant de puissance à une résistance qu'une source DC ayant la même valeur (pendant une période).

On peut donc réécrire les valeurs de puissance en fonction des valeurs RMS :

$$P = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i) \tag{7.50}$$
$$Q = V_{rms} I_{rms} \sin(\theta_v - \theta_i) \tag{7.51}$$

La valeur RMS est souvent utilisée pour décrire des sources sinusoïdales, au lieu de la valeur maximale. En effet, la tension de 120V du réseau électrique est une valeur RMS : la valeur maximale de tension est environ 170V ($\sqrt{2} \cdot 120$). Les ampoules aussi sont décrites par des valeurs RMS : une ampoule de 120V, 40W a une résistance de $120^2/40$, ou 360Ω, et un courant de 120/360, ou 0.33A.

7.7 Puissance complexe

La puissance complexe est la somme complexe des puissances moyennes et réactives :

$$S = P + jQ \tag{7.52}$$

L'avantage de la puissance complexe est qu'on peut s'en servir pour calculer directement les puissances à partir des phaseurs de tension et de courant. La puissance moyenne est la partie réelle de la puissance, et la puissance réactive est la partie imaginaire.

L'unité de la puissance complexe est le Volt-Ampère [VA], pour la distinguer de la puissance moyenne. On a donc trois unités pour la puissance : le Volt-Ampère [VA] pour la puissance complexe, le Watt [W] pour la puissance moyenne, et le Volt-Ampère-Réactif [VAR] pour la puissance réactive.

Un autre avantage de l'utilisation de la puissance complexe est qu'elle permet une interprétation géométrique de la puissance. La figure 7.2 montre la représentation graphique de la puissance complexe.

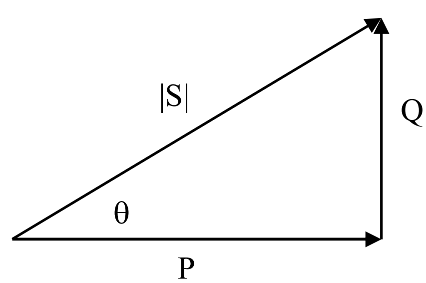


FIGURE 7.2 – Représentation graphique de la puissance complexe

L'angle θ de la figure 7.2 représente l'angle du facteur de puissance $(\theta_v - \theta_i)$. Cet angle est aussi donné par :

$$\tan\theta = \frac{Q}{P} \tag{7.53}$$

L'amplitude de la puissance complexe est aussi nommée la *puissance apparente* :

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{7.54}$$

La puissance moyenne P représente la puissance utile d'un circuit, tandis que la puissance apparente S représente la puissance qu'il faut fournir au circuit pour obtenir cette puissance utile P.

Un facteur de puissance plus petit que 1 indique que l'élément nécessite plus de puissance que ce qu'il peut utiliser. Si $f_p < 1$, alors $|S| > P$. Comme mentionné plus haut, la plupart des appareils industriels ont un facteur de puissance plus petit que 1 en arrière, ce qui indique une charge inductive. Pour ramener le facteur de puissance près de 1, on doit placer des condensateurs en parallèle avec la charge.

Exemple 10

Une charge électrique opère à une tension de 240 V_{rms}. La charge absorbe une puissance moyenne de 8kW avec un facteur de puissance de 0.8 arrière.

1. Calculer la puissance complexe à la charge.
2. Calculer l'impédance de la charge.

---

1. Parce que la charge est décrite comme ayant un facteur de puissance arrière, la charge est inductive, et donc la puissance réactive est positive. Par rapport au graphe des puissances de la figure 7.2, on peut calculer l'amplitude de S :

$$|S| = \frac{P}{\cos\theta} = \frac{8000}{0.8} = 10 \text{ kVA}$$

Et avec l'équation 7.54, on calcule :

$$Q = \sqrt{|S|^2 - P^2} = 6 \text{ kVAR}$$

La puissance complexe est donc :

$$S = 8 + j6 \text{ kVA}$$

2. On peut utiliser l'équation 7.50 pour calculer la valeur RMS du courant.

$$|\mathbf{I}_{rms}| = \frac{P}{|\mathbf{V}_{rms}|\cos(\theta)} = 41.67 \text{ A}$$

On peut aussi calculer l'angle de la charge, puisqu'il s'agit de l'angle du facteur de puissance :

$$\theta = \cos^{-1}(0.8) = 36.87°$$

Et, puisque le facteur de puissance est arrière, la charge est inductive. Une charge inductive indique que l'angle est positif. L'amplitude de la charge est le rapport entre la tension et le courant :

$$|Z| = \frac{|V_{rms}|}{|I_{rms}|} = \frac{240}{41.67} = 5.76$$

ce qui donne une charge :

$$Z = 5.76\angle(36.87°) = 4.608 + j3.456\ \Omega$$

Les calculs de puissance peuvent être effectués avec les phaseurs. On peut démontrer que :

$$S = \mathbf{V}_{rms}\mathbf{I}^*_{rms} = \frac{1}{2}\mathbf{VI}^* \tag{7.55}$$

où $\mathbf{I}^*$ indique le conjugué.

On peut aussi appliquer les équations avec les réactances :

$$P = |\mathbf{I}_{rms}|^2 R = \frac{1}{2}|\mathbf{I}_m|^2 R \tag{7.56}$$

$$Q = |\mathbf{I}_{rms}|^2 X = \frac{1}{2}|\mathbf{I}_m|^2 X \tag{7.57}$$

où X est la réactance appropriée (selon le cas d'un condensateur ou d'une inductance).

EXEMPLE 11

Une charge industrielle est connectée à une ligne de transmission de 240V$_{rms}$. La charge consomme une puissance active de 25kW et une puissance réactive de 16kVAR. Calculer :

1. Le facteur de puissance f_p
2. Le courant $\mathbf{I}$
3. La charge Z

---

1. Le facteur de puissance $f_p = \cos\theta$. Si on regarde sur les diagrammes de puissances, on trouve que

$$\tan\theta = \frac{Q}{P} = 32.62°.$$

Ceci veut dire que le facteur de puissance est :

$$f_p = \cos(32.62°) = 0.84 \text{ (arrière)} \qquad (Q > 0)$$

2. Pour trouver le courant, on sait que $S = \mathbf{VI}^*$. Donc :

$$\mathbf{I} = \left(\frac{S}{\mathbf{V}}\right)^* = \left(\frac{(25 + j16) \times 10^3}{(240)}\right)^* = 123.67\angle(-32.62°)$$

3. Il y a deux méthodes possibles pour obtenir la charge Z

a) Utiliser les puissances :

$$P = R|\mathbf{I}|^2 \Rightarrow R = \frac{P}{|\mathbf{I}|^2} = \frac{25\times 10^3}{(123.67)^2} = 1.63\Omega$$
$$Q = X|\mathbf{I}|^2 \Rightarrow X = \frac{Q}{|\mathbf{I}|^2} = \frac{16\times 10^3}{(123.67)^2} = 1.05\Omega$$

Alors $Z = 1.63 + j1.05\Omega = 1.94\angle(32.62°)$.

b) Utiliser la tension et le courant :

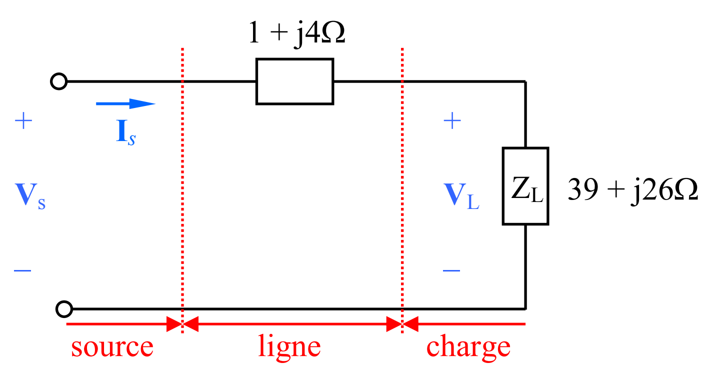
$$Z = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{240\angle 0}{123.67\angle(-32.62°)} = 1.94\angle(32.62°)$$

Exemple 12

Soit une charge de $39 + j26\Omega$ alimentée par une source de $250V_{rms}$. La ligne qui alimente la charge a une impédance de $1 + j4\Omega$.

1. Calculer le courant de charge $\mathbf{I}_L$ et la tension $\mathbf{V}_L$.
2. Calculer la puissance active et réactive consommée par la charge.
3. Calculer les pertes dans la ligne.
4. Calculer la puissance active et réactive fournie par la source.

Le circuit est :



1. Le courant de la charge est le courant total circulant dans le circuit.

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_s}{Z_T} = \frac{250\angle 0}{40 + j30} = 5\angle(-36.87°) \text{ A (rms)}$$
$$\mathbf{V}_L = \mathbf{I}_L Z_L = 5\angle(-36.87°)\cdot(39 + j26) = 234 - j13 = 234.36\angle(-3.18°) \text{ V (rms)}$$

2. Puissances :

$$\begin{aligned} S = \mathbf{V}_L\mathbf{I}_L^* &= (234.36\angle(-3.18°))(5\angle(+36.87°)) \\ &= (234 - j13)(4 + j3) \\ &= 975 + j650 \text{ VA} \end{aligned}$$

Donc : $P = 975$ W, $Q = 650$ VAR

3. Les pertes sur la ligne :

$$\begin{aligned} P &= R|\mathbf{I}^2| = (1)(5)^2 = 25 \text{ W} \\ Q &= X|\mathbf{I}^2| = (4)(5)^2 = 100 \text{ VAR} \end{aligned}$$

Habituellement, lorsqu'on parle de pertes sur la ligne, on ne parle que de P.

4. Puissances active et réactive de la source (encore ici, on peut utiliser deux méthodes) :

a) Somme des puissances connues :

$$\begin{aligned} S &= S_{ligne} + S_{charge} \\ &= (25 + j100) + (975 + j650) \\ &= 1000 + j750 \text{ VA} \end{aligned}$$

b) Tension et courant

$$\begin{aligned} S &= \mathbf{V}_{rms}\mathbf{I}_{rms}^* \\ &= (250)(5\angle(36.87°)) \\ &= (250)(4 + j3) \\ &= 1000 + j750 \text{ VA} \end{aligned}$$

7.8 Compensation du facteur de puissance

On va se servir d'un exemple pour démontrer le principe de correction du facteur de puissance. Le but est d'augmenter le facteur de puissance (habituellement, on veut ramener le facteur de puissance près de 1). On reprend l'exemple 11, mais cette fois on ajoute un condensateur aux bornes de la charge.

On veut trouver a) f_p', le nouveau facteur de puissance et b) le courant I_s fournit par la source.

a) Le nouveau facteur de puissance est :

$$f_p' = \frac{P'}{|S'|} = \frac{P'}{\sqrt{(P')^2 + (Q')^2}}$$

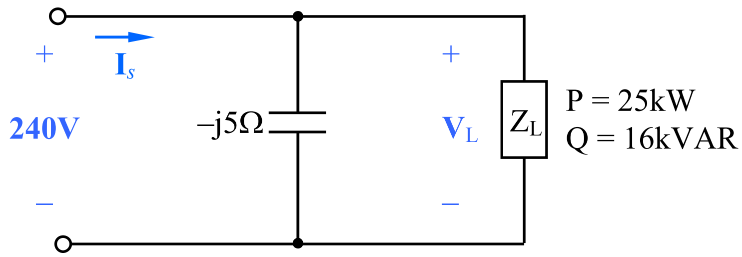


Figure 7.3 – Circuit pour correction du facteur de puissance

La puissance active $P' = P = 25$ kW (puisque le condensateur n'ajoute pas de puissance active au circuit), et la puissance réactive $Q' = Q + Q_C$.

$$Q_C = -|\mathbf{I}|^2 X_C = -\frac{V^2}{X_C} = -\frac{240^2}{5} = -11.52 \text{ kVAR}$$
$$Q' = 16 - 11.52 = 4.48 \text{ kVAR}$$

Donc,

$$f_p' = \frac{25}{\sqrt{(25)^2 + (4.48)^2}} = 0.98 \text{ (arrière)}$$

Le facteur de puissance est maintenant 0.98, comparativement à 0.84 dans l'exemple 11.

b) On peut trouver le courant à l'aide des puissances :

$$S' = \mathbf{VI}^*$$

$$\mathbf{I}^* = \frac{S'}{V} = \frac{(25 + j4.48) \times 10^3}{240} = 104.17 + j18.67A$$
$$\mathbf{I}' = 105.83\angle(-10.16°) \text{ A (rms)}$$

Si on compare,

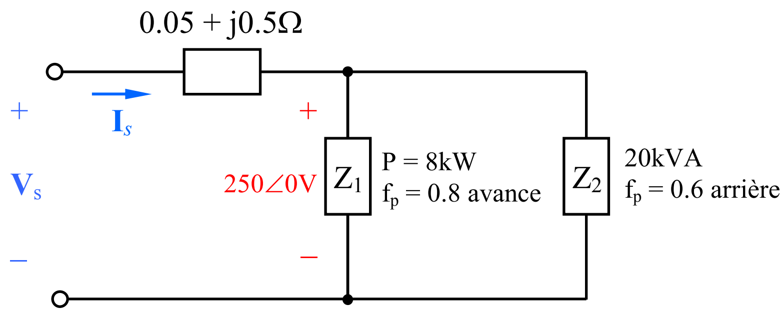
Charge non compensée	Charge compensée
$\lvert\mathbf{I}\rvert = 123$ A	$\lvert\mathbf{I}'\rvert = 106$ A
$f_p = 0.84$	$f_p = 0.98$
Pertes RI^2 ↗	Pertes RI^2 ↘

Les pertes sur la ligne de transport (qui ne sont pas montrées sur la figure ci-haut) sont RI^2. L'ajout du condensateur a permis de réduire le courant et donc les pertes sur la ligne de transport. Dans ce cas, les pertes ont chuté de :

$$\frac{R|\mathbf{I}|^2 - R(|\mathbf{I}'|)^2}{R|\mathbf{I}|^2} = \frac{123^2 - 106^2}{123^2} = 25.7\%$$

La puissance fournie par la source est alors réduite aussi.

EXEMPLE 13



1. Déterminer le facteur de puissance des deux charges en parallèle.
2. Déterminer l'amplitude du courant $\mathbf{I}_S$, la puissance active perdue dans la ligne et la puissance apparente fournie par la source.
3. Si la fréquence de la source est 60Hz, calculer la valeur du condensateur nécessaire pour corriger le facteur de puissance à 1. Recalculer les valeurs de la question 2.

---

1) $S_L = S_{L1} + S_{L2}$

$$f_{p_1} = \frac{P_1}{|S_{L1}|} \Rightarrow |S_{L1}| = \frac{P_1}{f_{p_1}} = 10 \text{ kVA}$$
$$Q = \sqrt{|S_1|^2 - P^2} = -6 \text{ kVAR}$$

Donc, $S_1 = 8 - j6$ kVA. On sait que $|S_2| = 20$ kVA :

$$P_2 = |S_2| \cdot f_p = 20 \cdot 0.6 = 12 \text{ kW}$$
$$Q = \sqrt{|S_2|^2 - P^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ kVAR}$$

Donc $S_L = S_1 + S_2 = 20 + j10$ kVA.

La puissance active totale des deux charges, P_L, est 20 kW. Donc :

$$f_p = \frac{P_L}{|S_L|} = \frac{20}{\sqrt{20^2 + 10^2}} = 0.894 \text{ (arrière)}$$

On aurait aussi pu trouver l'angle entre la tension et le courant :

$$\mathbf{I}_S^* = \frac{S}{\mathbf{V}} = \frac{20 + j10}{0.25} = 80 + j40 \Rightarrow \mathbf{I}_S = 80 - j40A = 89.44\angle(-26.57^\circ)$$

Et, $f_p = \cos(0^\circ + 26.57^\circ) = 0.894$.

2. Courant $\mathbf{I}_S$, puissance active perdue dans la ligne et puissance apparente fournie par la source.

Le courant de la source est le même que celui dans les charges, soit $89.44\angle(-26.57)$A. On sait que : $S_s = S_{ligne} + S_{charge}$. La puissance apparente totale dans la charge fut calculée dans la partie 1 : $S_{charge} = 20 + j10$ kVA. La puissance apparente dans la ligne est :

$$S_{ligne} = \mathbf{VI}^* = R_{ligne}|\mathbf{I}|^2 + jX_{ligne}|\mathbf{I}|^2 = (89.44)^2(0.05 + j0.5) = 400 + j4000 \text{ VA}$$

La puissance apparente fournie par la source est :

$$\begin{aligned} S_s &= S_{ligne} + S_{charge} \\ &= (0.4 + j4) + (20 + j10) \\ &= 20.4 + j14 \text{ kVA} \end{aligned}$$

3. On veut corriger le facteur de puissance à 1. Ceci veut dire qu'il faut éliminer la puissance réactive consommée par les charges.

$$\begin{aligned} Q_C &= -Q_S = -10 \text{ kVAR} \\ X_C &= \frac{|V^2|}{Q} = \frac{250^2}{10 \times 10^3} = -6.25\ \Omega \\ X_C &= -\frac{1}{C\omega} = -6.25 \Rightarrow C = 424.4\mu\text{F} \end{aligned}$$

La puissance apparente totale de la charge est maintenant $|S| = P = 20$kVA. Le courant est

$$|I| = \frac{20 \times 10^3}{250} = 80 \text{ A}$$

La puissance perdue dans la ligne est maintenant :

$$S_{ligne} = R|\mathbf{I}|^2 + jX|\mathbf{I}|^2 = (80)^2(0.05 + j0.5) = 320 + j3200 \text{ VA}$$

Donc la puissance totale fournie par la source est :

$$\begin{aligned} S_s &= S_{ligne} + S_{charge} \\ &= (0.32 + j3.2) + (20 + j0) \\ &= 20.32 + j3.2 \text{ kVA} \end{aligned}$$

* Les pertes sur la ligne ont chuté de 400 - 320 = 80 W.