

CHAPITRE 2

Circuits résistifs simples

Ce chapitre présente les techniques de base d'analyse de circuits. Ces techniques vont permettre de simplifier les circuits pour en faire l'analyse. On verra en particulier les lois de Kirchhoff; ce sont deux lois de base nécessaire pour faire l'analyse de circuits électriques.

On verra aussi deux méthodes qui permettent de rapidement calculer la tension ou le courant : la méthode du diviseur de tension, et le diviseur de courant. De plus, les différentes méthodes de mesurer la tension et le courant dans un circuits seront présentées, ainsi qu'une méthode pour simplifier des résistances, la transformation $\Delta - Y$.

2.1 Définitions

Avant de présenter les lois de Kirchhoff, il faut donner quelques définitions. Le concept de noeud et de boucle doit être bien compris avant d'être capable d'appliquer les techniques plus avancées d'analyse de circuits.

Noeud : un point où se joignent 2 éléments ou plus.

La figure 2.1 montre un exemple de circuit ayant 4 noeuds. Le noeud a connecte la source de 15V à la résistance de 10Ω . Le noeud b connecte la résistance de 10Ω et la résistance de 20Ω . Le noeud c connecte la résistance de 20Ω et la résistance de 50Ω , et le noeud d connecte la résistance de 50Ω à la source. Dans ce cas-ci, il y a seulement 2 éléments branchés à chaque noeud.

Maille (boucle) : en commençant à un noeud, on trace un chemin fermé à travers les éléments en passant seulement 1 fois par un noeud, pour retourner au noeud initial : c'est une boucle.

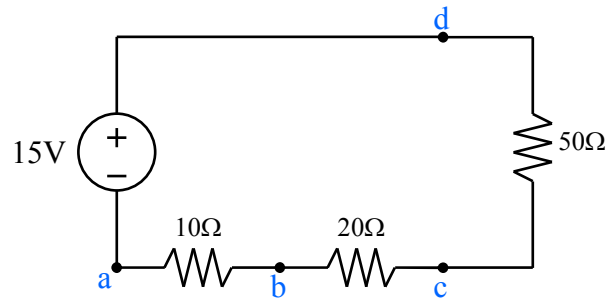


FIGURE 2.1 – Exemple de circuit avec noeuds

La figure 2.2 montre une exemple de circuits avec des boucles. Dans ce cas-ci, il y a 3 boucles : 1) la boucle $a - b - d - a$, 2) la boucle $b - c - d - b$, et 3) la boucle $a - b - c - d - a$. Dans chaque cas, on traverse les noeuds une seule fois.

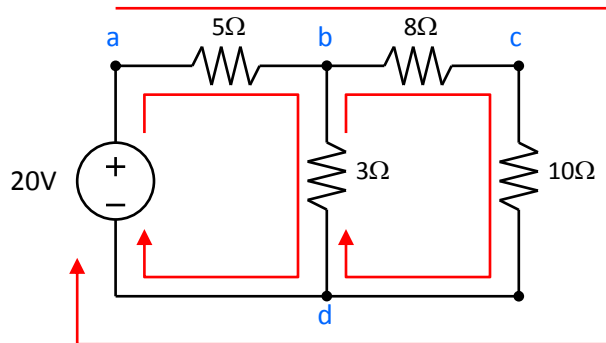


FIGURE 2.2 – Exemple de circuit avec noeuds et boucles

2.1.1 Éléments en série

Lors de l'analyse de circuits, il est important de bien comprendre si des éléments sont en série ou en parallèle. En premier, on regarde aux éléments en série : deux éléments sont en série s'ils sont traversés par le *même courant*. Des éléments en série sont branchés ensemble à un noeud, où il n'y a que ces deux éléments.

La figure 2.3 montre un exemple de résistances en série. Bien que la figure montre des résistance, ça pourrait être des sources de tension, ou des capacitances, par exemple. Dans le premier cas, le même courant traverse les deux résistances (il y a seulement 2 éléments branchés au noeud). Dans le deuxième cas, il y a 3 éléments branchés au noeud, et donc le courant se sépare à ce noeud. Ce n'est pas le même courant dans la résistance R_1 et R_2 . Dans le troisième cas, puisque la résistance R_2 n'est pas branchée à quelque chose d'autre, aucun courant ne peut circuler dans la résistance R_2 . Tout le courant qui circule dans R_1 passe dans R_3 , donc ces deux résistances sont en série.

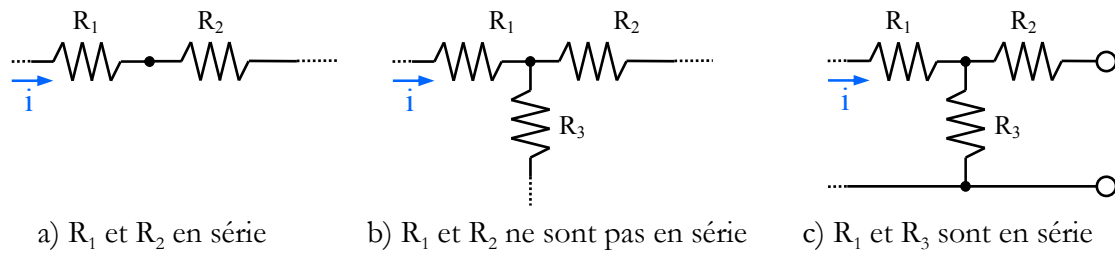


FIGURE 2.3 – Exemple de résistances en série

2.1.2 Éléments en parallèle

Tout comme les éléments en série, il est important de bien comprendre comment des éléments sont branchés en parallèle. Des éléments sont branchés en parallèle si leur deux noeuds sont branchés ensemble. Ils ont donc la même tension.

La figure 2.4 montre des exemples d'éléments qui sont en parallèle. Dans les deux premiers cas, les deux résistances sont branchées aux mêmes noeuds. Dans le deuxième cas, c'est un peu plus difficile à dire, mais les deux résistances ont quand même la même tension. Dans le troisième cas, les résistances ne sont pas en parallèle.

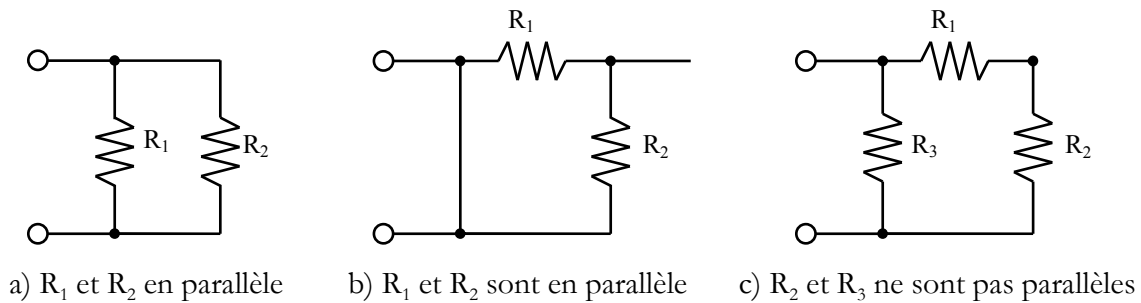


FIGURE 2.4 – Exemple de résistances en parallèle

2.2 Lois de Kirchhoff

Les lois de Kirchhoff sont les deux lois de base de l'analyse de circuits électriques. Une des lois s'applique aux noeuds, et l'autre s'applique aux boucles.

2.2.1 Loi de Kirchhoff des courants

La loi de Kirchhoff des courants est :

La somme des courants à un noeud est 0. Ou, d'une autre façon, la somme des courants qui entrent dans un noeud est égale à la somme des courants qui sortent du noeud.

Il faut appliquer une convention pour utiliser cette loi :

- Si un courant qui entre dans un noeud est positif (+), alors un courant qui sort du noeud est négatif (-).
- Si un courant qui entre dans un noeud est négatif (-), alors un courant qui sort du noeud est positif (+).

On peut utiliser l'une des deux conventions précédentes, mais il faut être consistant.

2.2.2 Loi de Kirchhoff des tensions

La loi de Kirchhoff des tensions est :

La somme des tensions dans une boucle est 0.

Pour utiliser la loi de Kirchhoff correctement, il faut assigner un signe (+ ou -) à chaque tension dans la boucle. Si on applique un signe positif à une chute de tension, il faudra appliquer un signe négatif à une hausse de tension, et vice-versa.

2.2.3 Application des lois de Kirchhoff

Lors de l'application des lois de Kirchhoff, il faut être consistant dans l'utilisation des signes. Comme exemple, on reprend le circuit de la figure 2.1, mais cette fois on ajoute des tensions et courants à chaque élément. Ce circuit est donné à la figure 2.5. Noter qu'on a indiqué que le courant sort de la source de tension, ce qui fait du sens. Parce qu'il n'y a qu'une seule source dans le circuit, cette source doit fournir de la puissance, et donc le courant doit sortir de la borne positive.

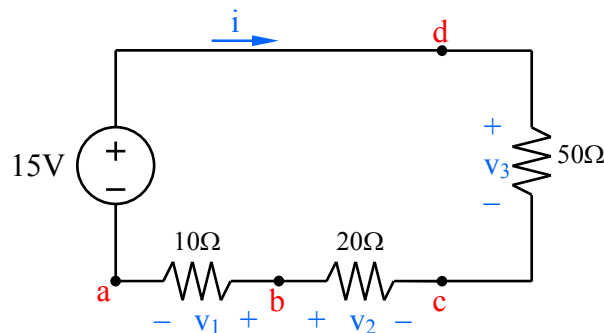


FIGURE 2.5 – Exemple de circuit

Autour de la boucle du circuit de la figure 2.5, on a ajouté des signes + et - pour chaque élément (sauf la source, parce qu'il est déjà donné). La direction de ces signes

n'est pas importante pour le moment ; ce qui est important, c'est comment on écrit les signes en appliquant la loi de Kirchhoff.

Pour commencer l'analyse du circuit, on va faire le tour de la boucle, en commençant par n'importe quel élément, et faire la somme des tensions. Dans ce cas-ci, on choisit une convention : si le courant entre dans le +, on écrit + pour le signe de la tension. On obtient l'équation suivante, en commençant par la source de tension :

$$-15 + v_3 - v_2 + v_1 = 0 \quad (2.1)$$

On a appliqué la loi de Kirchhoff des tensions : la somme des tensions dans une boucle doit donner 0. De plus, on a respecté la convention choisie : si le courant entre dans la borne + de l'élément, on écrit un + dans l'équation de la tension.

Cependant, dans l'équation 2.1, on a 3 inconnues. Pour résoudre cette équation, il faut trouver d'autres équations. Dans ce cas-ci, on utilise la loi d'Ohm :

$$\begin{aligned} v_1 &= 10i \\ v_2 &= -20i \\ v_3 &= 50i \end{aligned} \quad (2.2)$$

Remarquer le signe – pour v_2 ; puisque le courant entre dans la borne négative, il faut utiliser – dans l'équation qui relie la tension au courant.

On peut ensuite écrire les équations 2.2 dans l'équation 2.1 pour obtenir :

$$-15 + 50i - (-20i) + 10i = 0 \quad (2.3)$$

La seule inconnue est le courant i , qu'on résout pour trouver $i = 0.1875\text{A}$. Le signe de i nous indique la direction du courant. Puisqu'on a trouvé que i est positif, ceci veut dire que le sens choisit du courant est correct. Si on aurait trouvé un signe négatif, le courant irait dans le sens contraire.

Avec le courant calculé, on peut calculer la tension dans chaque élément.

$$\begin{aligned} v_1 &= (10)(0.1875) = 1.875\text{V} \\ v_2 &= -(20)(0.1875) = -3.75\text{V} \\ v_3 &= (50)(0.1875) = 9.375\text{V} \end{aligned} \quad (2.4)$$

D'après ces calculs, la tension v_2 , qui est la tension v_{bc} , est négative. On pourrait aussi exprimer cette tension par $v_{cb} = 3.75\text{V}$, une tension positive.

On peut faire un bilan de puissance pour s'assurer que tous les calculs sont corrects. On prend le courant qui entre dans la borne positive comme une tension positive (selon

la référence choisie dans cet exemple). Les puissances sont :

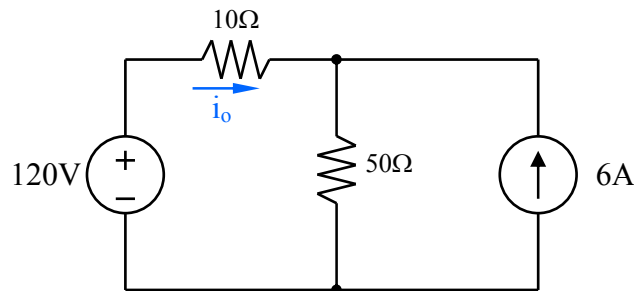
$$\begin{aligned} p_S &= -v_S i = -(15)(0.1875) = -2.8125 \text{ W} \\ p_1 &= R_1 i^2 = (10)(0.1875)^2 = 0.3516 \text{ W} \\ p_2 &= R_2 i^2 = (20)(0.1875)^2 = 0.7031 \text{ W} \\ p_3 &= R_3 i^2 = (50)(0.1875)^2 = 1.7578 \text{ W} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Le seul élément qui fournit de la puissance est la source, ce qui fait du sens, puisque des résistances ne peuvent pas fournir de puissance. Si on fait la somme des puissances, on trouve que la puissance fournie égale la puissance consommée. Tout est donc correct.

On aurait obtenu les mêmes résultats si on aurait inversé les bornes des tensions. Si on aurait choisit $v_2 = v_{cb}$ au lieu de $v_2 = v_{bc}$, on aurait trouvé les mêmes valeurs de tension (v_{cb} serait positif, comme on a calculé plus haut).

EXEMPLE 1

Pour le circuit suivant,

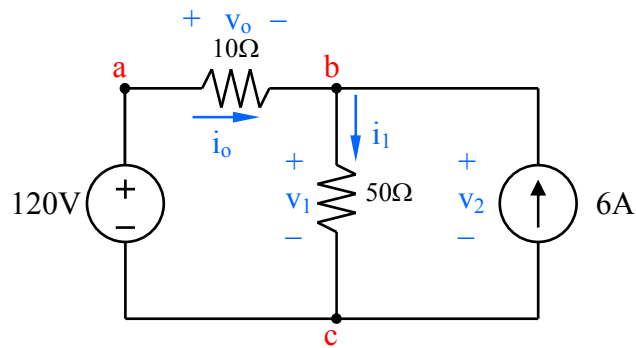


1. Calculer i_o ,
2. Vérifier les calculs pour s'assurer que $P_{fournie} = P_{consommée}$.

La première chose à faire est d'indiquer les noeuds, tensions et courants dans le circuit. La figure suivante montre un exemple avec ces valeurs indiquées. Il y a trois noeuds dans ce circuit. Noter le sens des courants. Puisque le sens de i_o est déjà donné, et que le sens du courant de 6A est donné aussi, au noeud b , il faut qu'il y ait un courant qui sorte de ce noeud. Il ne reste que le courant qui traverse la résistance de 50Ω. Cependant, on aurait pu mettre le courant dans le sens contraire, et on obtiendrait les même réponses (tout en faisant attention aux signes).

Pour calculer le courant de sortie i_o , on applique les lois de Kirchhoff. On peut appliquer la loi de Kirchhoff des courants au noeud b , en utilisant la convention qu'un courant qui entre dans un noeud est positif :

$$i_o - i_1 + 6 = 0$$



Ceci nous donne une équation ayant deux inconnues. On peut utiliser la loi de Kirchhoff des tensions pour obtenir une autre équation. Si on utilise la maille $c-a-b-c$, en faisant la somme des tensions avec la convention qu'un courant qui entre dans le + est positif,

$$-120 + v_o + v_1 = 0$$

À l'aide de la loi d'Ohm, on peut simplifier :

$$-120 + 10i_o + 50i_1 = 0$$

On a maintenant 2 équations et 2 inconnues. On peut résoudre facilement ce système d'équations :

$$i_1 = i_o + 6$$

et donc,

$$\begin{aligned} -120 + 10i_o + 50(i_o + 6) &= 0 \\ 60i_o &= -180 \\ i_o &= -3 \end{aligned}$$

Le courant $i_o = -3\text{A}$. De plus, le courant $i_1 = 3\text{A}$. On peut aussi résoudre ce système d'équation simples avec Mathcad :

Given

$$i_o - i_1 + 6 = 0$$

$$-120 + 10 \cdot i_o + 50 \cdot i_1 = 0$$

$$\text{Find}(i_o, i_1) \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Avec ces calculs, on peut maintenant faire le bilan de puissance.

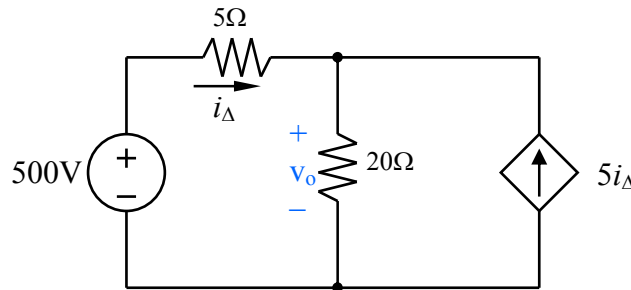
$$\begin{aligned}
 p_{10\Omega} &= Ri^2 = (10)(-3)^2 = 90\text{W} && \text{consomme} \\
 p_{50\Omega} &= Ri^2 = (50)(3)^2 = 450\text{W} && \text{consomme} \\
 p_{120\text{V}} &= -vi = -(120)(-3) = 360\text{W} && \text{consomme} \\
 p_{6\text{A}} &= -vi = -(50)(3)(6) = -900\text{W} && \text{fournit}
 \end{aligned}$$

Noter que la tension aux bornes de la source de 6A est la même que celle aux bornes de la résistance de 50Ω , puisqu'ils sont en parallèle.

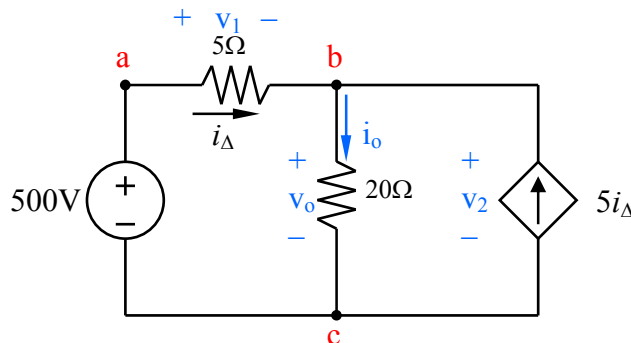
On peut faire le bilan. La puissance consommée totale est $90 + 450 + 360 = 900\text{W}$, tandis que la puissance fournie totale est 900W . Tout est correct. Remarquer que la source de 120V consomme de la puissance dans ce cas-ci.

EXEMPLE 2

On va faire un exemple d'un circuit ayant une source dépendante. Soit le circuit de la figure suivante. Calculer la tension v_o .



On procède de la même façon que d'habitude : on identifie les noeuds, puis on assigne les tensions et courants aux éléments. Une façon de faire est montrée à la figure suivante.



Il y a 3 noeuds. On applique la loi de Kirchhoff des courants au noeud b , puisque c'est là où se rencontrent les 3 courants. On obtient l'équation suivante, où on applique la

convention qu'un courant qui entre dans le noeud est positif :

$$i_{\Delta} - i_o + 5i_{\Delta} = 0$$

On peut résoudre pour obtenir

$$i_o = 6i_{\Delta}$$

On applique alors la loi de Kirchhoff des tensions à la maille $a - b - c - a$, avec la convention qu'un courant qui entre dans le + est positif :

$$-500 + 5i_{\Delta} + 20i_o = 0$$

On a deux équations, et deux inconnues, qu'on résout pour obtenir :

$$i_{\Delta} = 4 \text{ A}$$

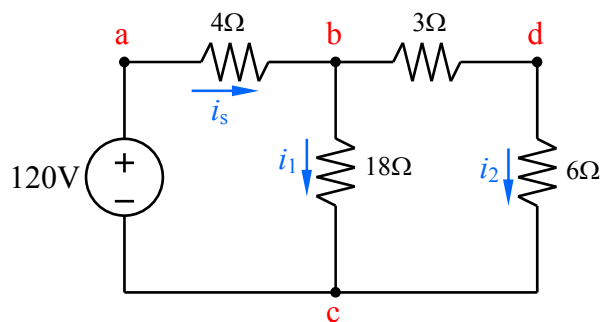
$$i_o = 24 \text{ A}$$

et la tension de sortie v_o est :

$$v_o = 20i_o = 480 \text{ V}$$

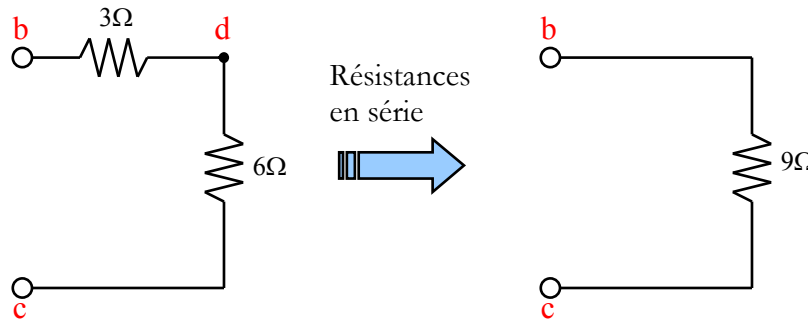
EXEMPLE 3

Soit le circuit de la figure suivante. Calculer les courants i_s , i_1 et i_2 .

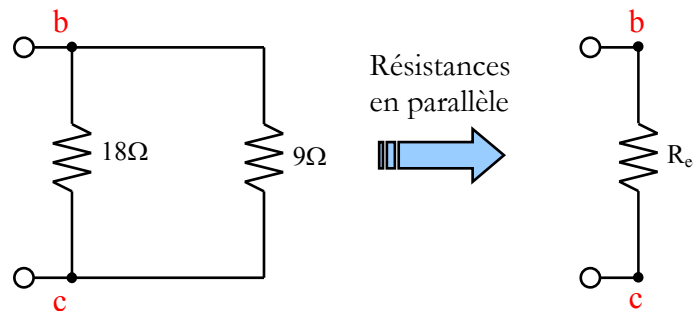


De façon générale, pour solutionner ce genre de problème, on procède par étapes. On va simplifier le circuit le plus possible en se rapprochant de la source. Par après, on refait les étapes à l'inverse pour tout calculer.

Puisque la source est branchée entre les noeuds a et c , on va simplifier en premier le circuit entre les noeuds b et c . On simplifie en premier la branche à droite du circuit. Les deux résistances de cette branche sont en série, donc il est facile de les combiner. On effectue la simplification suivante :



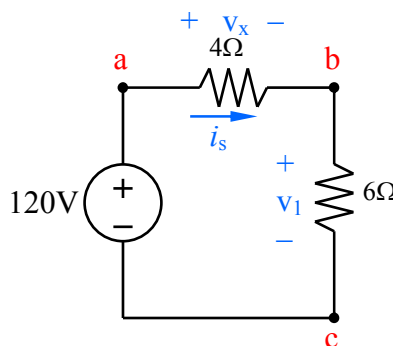
Par après, on peut simplifier le circuit complet entre les noeuds b et c .



La résistance équivalente R_{eq} est obtenue en appliquant l'équation pour deux résistances en parallèle :

$$R_{eq} = \frac{(18)(9)}{18 + 9} = 6\Omega$$

Le circuit devient maintenant : Il est important de noter que dans la figure précédente,



on n'a pas indiqué le courant i_1 . Le courant i_1 n'apparaît plus parce qu'on a modifié

l'élément entre les noeuds b et c . Cependant, la tension v_1 est la même tension que celle qu'on avait avant de faire la simplification.

On peut maintenant faire des calculs. On applique la loi de Kirchhoff des tensions autour de la boucle, et la loi d'Ohm (avec les même conventions que d'habitude).

$$-120 + 4i_s + 6i_s = 0$$

On obtient :

$$i_s = 12 \text{ A}$$

La tension v_1 (qui est la tension v_{bc}) peut maintenant être calculée :

$$v_1 = R_{eq}i_s = (6)(12) = 72 \text{ V}$$

Avec la tension v_1 , on peut calculer les courants voulus en faisant les calculs dans les circuits dans l'ordre inverse des simplifications.

Puisque la tension v_1 est la même que dans le circuit original, le courant i_1 est tout simplement la tension v_1 divisée par la résistance :

$$i_1 = \frac{v_1}{18} = \frac{72}{18} = 4 \text{ A}$$

Pour calculer le courant i_2 , on observe que la tension v_1 est la tension aux bornes de la résistance de 9Ω qu'on a calculé à la première étape de la simplification. Le courant est obtenu en appliquant la loi d'Ohm :

$$i_2 = \frac{v_1}{9} = \frac{72}{9} = 8 \text{ A}$$

C'est le courant qui circule dans la résistance de 3Ω et dans celle de 6Ω .

On peut faire le bilan de puissance pour vérifier les calculs.

$$\begin{aligned} p_{4\Omega} &= Ri^2 = (4)(12)^2 = 576\text{W} && \text{consomme} \\ p_{18\Omega} &= Ri^2 = (18)(4)^2 = 288\text{W} && \text{consomme} \\ p_{3\Omega} &= Ri^2 = (3)(8)^2 = 192\text{W} && \text{consomme} \\ p_{6\Omega} &= Ri^2 = (6)(8)^2 = 384\text{W} && \text{consomme} \\ p_{120\text{V}} &= -vi = -(120)(12) = -1440\text{W} && \text{fournit} \end{aligned}$$

La somme de la puissance consommée est égale à la somme de la puissance fournie.

2.3 Diviseur de tension

Le diviseur de tension est une méthode pour accélérer le calcul de tensions dans un circuit. Le circuit *doit* être de la forme donnée à la figure 2.6. Il ne doit pas avoir une autre résistance en parallèle avec R_1 ou R_2 .

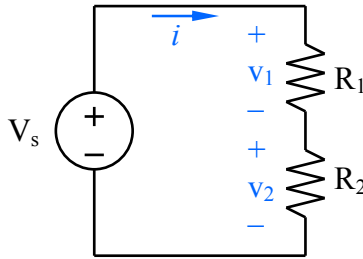


FIGURE 2.6 – Circuit diviseur de tension

La méthode du diviseur de tension permet de rapidement calculer v_1 ou v_2 en fonction de la source v_s . On commence en appliquant la loi de Kirchhoff des tensions à la boucle :

$$-v_s + R_1 i + R_2 i = 0 \quad (2.6)$$

$$v_s = i(R_1 + R_2) \quad (2.7)$$

et on obtient

$$i = \frac{v_s}{R_1 + R_2} \quad (2.8)$$

À partir de la dernière équation, on peut calculer la tension aux bornes de chaque résistance.

$$v_1 = R_1 i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s \quad (2.9)$$

$$v_2 = R_2 i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s \quad (2.10)$$

Au lieu de faire tout le calcul avec la loi de Kirchhoff, on peut appliquer directement l'équation 2.9 ou 2.10, si on a un circuit de la forme de la figure 2.6. Ces équations nous disent aussi que v_1 et v_2 sont un pourcentage de la tension totale v_s .

2.4 Diviseur de courant

Le diviseur de courant est une méthode pour accélérer le calcul de courants dans un circuit simple. Le circuit *doit* être de la forme donnée à la figure 2.7. Le courant i_s peut

provenir d'une source de courant, ou de n'importe quel genre de circuit. Mais R_1 et R_2 doivent être deux résistances en parallèle. Il ne peut pas y avoir d'autre élément.

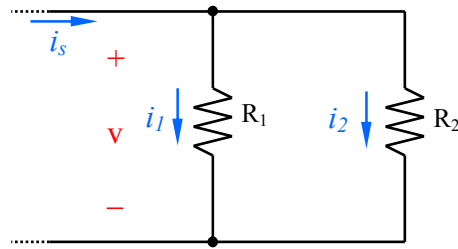


FIGURE 2.7 – Circuit diviseur de courant

La méthode du diviseur de courant permet de rapidement calculer i_1 et i_2 en fonction du courant i_s qui entre dans le noeud commun. On peut combiner les résistances parallèles :

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.11)$$

Puisque les résistances sont en parallèle, elles ont la même tension. La tension aux bornes de la résistance équivalente est :

$$v = R_1 i_1 = R_2 i_2 = R_{eq} i_s = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_s \quad (2.12)$$

À partir de la dernière équation, on obtient les équations suivantes :

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_s \quad (2.13)$$

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_s \quad (2.14)$$

Ces équations sont de la même forme que les équations du diviseur de tension, sauf qu'on a inversé la résistance R_1 et R_2 . Ces équations nous indiquent quel pourcentage de i_s se retrouve dans les résistances R_1 et R_2 .

2.5 Pont de Wheatstone

Le pont de Wheatstone est un circuit utilisé pour mesurer des résistances. Le schéma est montré à la figure 2.8.

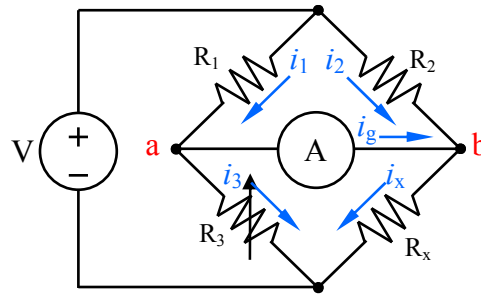


FIGURE 2.8 – Pont de Wheatstone

Dans ce circuit, la résistance R_3 est une résistance variable. La résistance R_x est la résistance à mesurer. Les résistances R_1 et R_2 sont des résistances connues.

Pour trouver la résistance inconnue R_x , on ajuste R_3 jusqu'à ce que l'ampèremètre indique un courant nul ($i_g = 0$).

Si le courant i_g est nul, il faut que :

1. Le courant $i_1 = i_3$, et le courant $i_2 = i_x$,
2. La tension au noeud a est égale à la tension au noeud b ($v_a = v_b$, ou $v_{ab} = 0$).

Étant donné ces deux conditions, on a :

$$R_1 i_1 = R_2 i_2 \quad (2.15)$$

$$R_3 i_3 = R_x i_x \quad (2.16)$$

Par substitution, on obtient

$$R_3 i_1 = R_x i_2 \quad (2.17)$$

Si on divise l'équation 2.15 par l'équation 2.17, on obtient la relation suivante :

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_x} \quad \Rightarrow \quad R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3 \quad (2.18)$$

2.6 Transformation Δ -Y

On a vu comment simplifier des circuits en série et en parallèle, et ceci permet de simplifier la majorité des circuits. Cependant, il existe une autre forme de circuit qu'on ne peut pas simplifier selon les méthodes vues jusqu'à présent. On a besoin d'une simplification appelée Δ -Y.

Soit un circuit de la forme donnée à la figure 2.9. Les résistances ne sont pas en série, parce que lorsqu'elles seront branchées à quelque chose, elles ne seront pas traversées par

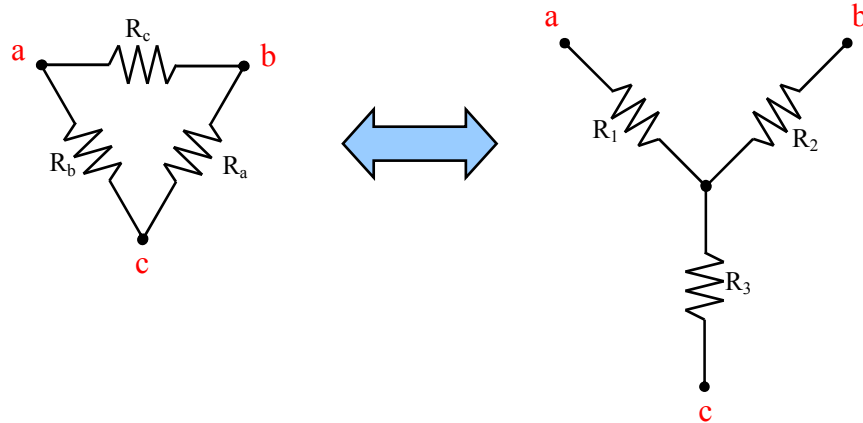


FIGURE 2.9 – Transformation Δ -Y

le même courant. De plus les résistances ne sont pas en parallèle, parce qu'elles ne sont pas branchées au deux mêmes noeuds.

Pour faire la transformation de la forme Δ à la forme Y, on utilise les équations suivantes :

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.19)$$

$$R_2 = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.20)$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.21)$$

Pour passer de Y à Δ , on utilise les équations suivantes :

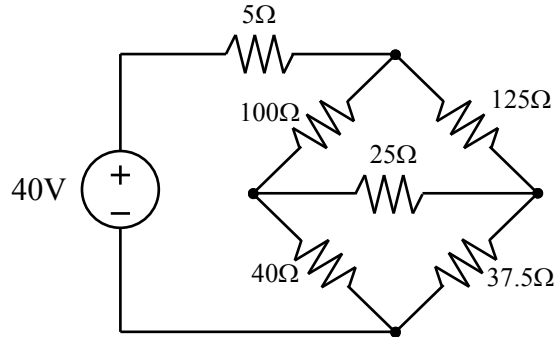
$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1} \quad (2.22)$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_2} \quad (2.23)$$

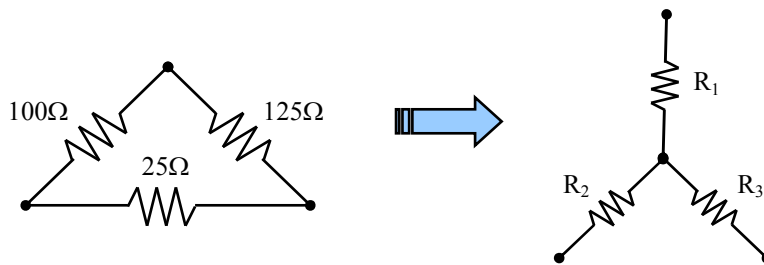
$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3} \quad (2.24)$$

EXEMPLE 4

Pour le circuit suivant, calculer le courant et la puissance de la source.



Il y a deux Δ dans ce circuit. On doit en transformer un des deux en Y pour trouver la résistance équivalente. On choisit celui du haut. La transformation est la suivante :



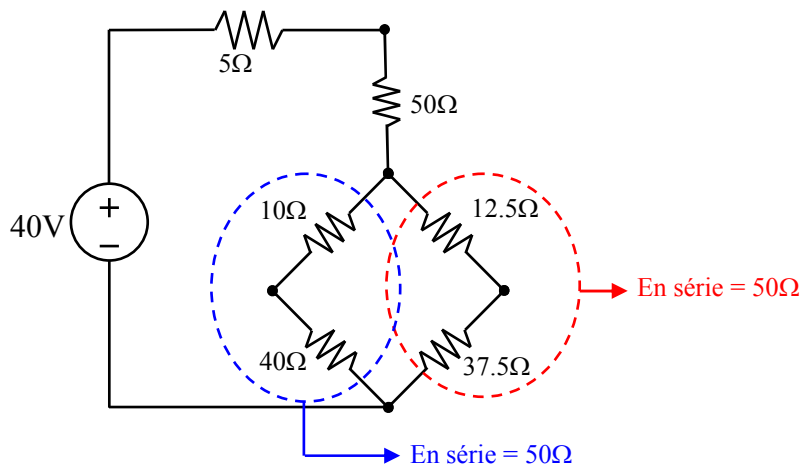
où les résistances sont calculés selon :

$$R_1 = \frac{(100)(125)}{100 + 25 + 125} = 50\Omega$$

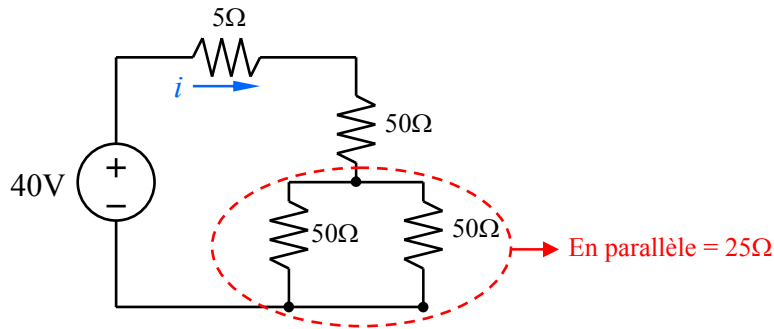
$$R_2 = \frac{(100)(25)}{100 + 25 + 125} = 10\Omega$$

$$R_3 = \frac{(125)(25)}{100 + 25 + 125} = 12.5\Omega$$

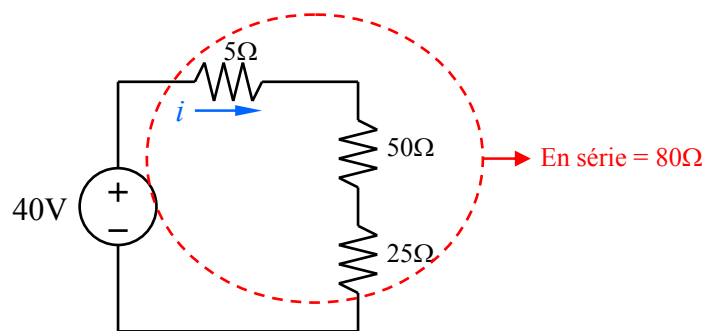
Le circuit devient alors celui de la figure suivante. Noter qu'avec cette transformation, on a maintenant deux groupes de résistances en série. La résistance de 12.5Ω est en série avec la résistance de 37.5Ω , et la résistance de 40Ω est en série avec la résistance de 10Ω . On obtient deux résistances de 50Ω en parallèle.



On peut maintenant effectuer la simplification suivante.



La prochaine étape est de combiner toutes ces résistances. Il ne reste qu'un circuit



simple : une source de tension de 40V branchée à une résistance de 80Ω. Le courant fournit par la source est :

$$i = \frac{v}{R} = \frac{40}{80} = 0.5 \text{ A}$$

et la puissance :

$$p = -vi = (40)(0.5) = -20 \text{ W}$$